Mathématiques en S3 **TD 1** L2 Parcours Pluridisciplinaire
Septembre 2014 Université Blaise Pascal - UFR LLSH

Exercice 1

1. Voici, pour une calculatrice moderne, la suite des touches sur lesquelles appuyer pour effectuer un calcul ($\boxed{\wedge}$ correspond à l'opérateur de puissance, A et B correspondent à des mémoires de la calculatrice): $\boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{A}\ \boxed{\times}\ \boxed{B}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{A}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{2}$. Une autre calculatrice, plus ancienne, ne sait pas gérer les priorités d'opérateurs de calcul. Ajouter autant de touches $\boxed{(}$ et $\boxed{)}$ que nécessaire pour qu'elle effectue le calcul.

2. Supprimer chaque paire de parenthèses inutile dans les expressions suivantes, en précisant pour chaque suppression la règle qui permet cette simplification.

$B = ((3x^2) - (4x + 1)) + (x^3 + (x^2 + (x + 1))) - (7x)$.

$C = \sqrt{((3x - 2) - y)} + (4(x - (2y))) - ((2 - y) - (2 + x))$.

$D = \frac{(1+x)}{(1-x)} + x^{(3+x)} + x^{(2^3)} - (x^2)^3$.

3. Les parenthèses ont été perdues dans les expressions suivantes. Saurez-vous les remettre en place afin que le résultat du calcul soit correct pour $x = 0$? Le résultat sera-t-il correct pour n'importe quelle valeur de x ?

$E = 2x + 3 * 3x - 5 = -15$. $F = -3 - 2x/1 + x - 2 = -1$.

4. Ecrire avec un seul symbole de fraction (écriture de la forme $\frac{X}{Y}$) les expressions :

$G = x + 1/(x - 1) + 3(x - 1)^{-1}$. $H = 1/((x + 3)/(x - 1)) + 2(x - 1)/(3(x + 3))$.

Exercice 2

1. Développer et simplifier les expressions :

$A = x(y - 2) + y(2 - x) + 2(x - y)$. $D = (2x - 5)(2x + 5)$.

$B = (3x - 1)(2 - x) - (2x + 3)(1 - x)$. $E = (3x - 1)^2$.

$C = (x - 2)(x^2 + 3) - (x + 2)x^2$.

2. Trouver les valeurs de x vérifiant :

a) : $2(x + 1) = 5$. e) : $x^{-1} = 2$.

b) : $\frac{7}{5x} = -1$. f) : $(x + 1)^3 = 27$.

c) : $\frac{3}{4} = \frac{5}{x-1}$. g) : $(x - 1)^2(3x - 2)(4 - 5x)(x^2 + 1) = 0$.

d) : $x^2 = 2$. h) : $(x - 1)^{-1} = 0$.

Exercice 3

Corriger les erreurs de raisonnement :

1) puisque $4x = 5$ alors $x = 5 - 4$, donc $x = 1$.
2) $7x = 0$ donc $x = -7$.
3) $(x^2 - 4) = 0$ est équivalent à $(x - 2) = 0$, donc $x = 2$.
4) $x^2 = 7$ donc $x = \sqrt{7}$.
5) $(x - 7)^2 = 0$ donc $x = \sqrt{7}$.
6) $x - 2 * x + 2 = x^2 - 4$.
7) L'équation $1/((x + 5)(x - 2)) = 0$ a pour solutions -5 et 2.
8) L'équation $(x - 1)(4x - 8)/((x + 5)(x - 2)) = 0$ a pour solutions 1 et 2.

Exercice 4

1. Factoriser au mieux les expressions :

$E_1 = 4x^2 - 49$.

$E_2 = 16x^2 + 56x + 49$.

$E_3 = x^3 + x^2 + (x + 1)$.

2. Résoudre les équations d'inconnue x :

$E_1 = 0$.

$E_2 = 0$.

$E_3 = 0$.

$E_4 = (3x)^2 + 3x + 3x^3$. — $E_4 = 3x$.
$E_5 = 7xy - 14xz$. — $E_5 = 0$ avec $y = z = 2x$.
$E_6 = (7x - 3)(x - 2) + 7(2 - x)$. — $E_6 = 0$, puis $E_6 = x - 2$.
$E_7 = (6 - 21x) - 4(7x - 2) - (x + 1)(7x - 2)$. — $E_7 = 0$.
$E_8 = (x - 7)^2 + (x - 7)$. — $E_8 = 0$.
$E_9 = (25x - 15) + (10xy - 6y)$. — $E_9 = 0$ avec $x = y$.
$E_{10} = 3x^2 - 10\sqrt{3}x + 25$. — $E_{10} = 0$

Exercice 5

1. Démontrer que pour tous nombres x et y, on a $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$. En déduire l'aire d'un champ rectangulaire de périmètre 36 dam et dont la longueur dépasse la largeur de 4 dam.

2. Démontrer que pour tous nombres x et y, on a $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$. En déduire l'hypoténuse d'un triangle rectangle sachant que la somme des longueurs des deux autres côtés vaut 49 et leur différence 31.

3. Soient x et y tels que $x = y$. On a alors $x^2 = xy$, $x^2 - y^2 = xy - y^2$ et donc $(x+y)(x-y) = (x-y)y$. Par simplification on obtient $x + y = y$. Pour $x = 1$ et $y = 0$, on a alors $1 = 0$; on en déduit ainsi $0 = 1 = 2 = ...$: il n'y a qu'un seul nombre entier ! N'est-ce pas ?

Exercice 6

1. Compléter le tableau suivant : quels nombres appartiennent à quels ensembles ?

	35	-6	$2,6$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{7}$	π	$(-5)^2$	$(\frac{2}{7})^2$	$(\frac{2}{3})(\frac{3}{4})$	$2,5.10^-2$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi/3-17\pi/51}}{\sqrt{\pi}}$	$\sqrt{\frac{-45}{-225}}$
$\mathbb{N}$													
$\mathbb{Z}$													
$\mathbb{D}$													
$\mathbb{Q}$													
$\mathbb{R}$													

2. Construire ensuite un *diagramme de Venn* et y placer tous ces nombres

Exercice 7 Chacune des affirmations suivantes est-elle est vraie ou fausse ?

1) Pour tout nombre réel x, si $(x + 3) > 0$ alors $x > 3$. De même, si $(x - 3)^2 > 0$ alors $x > 3$.
2) Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel p, tel que $p > n$.
3) Il existe un entier naturel n tel que, pour tout entier naturel $p \neq 0$, $n < p$.
4) Pour tous nombres réels positifs x et y, si $x > y$ alors $x^2 > y^2$, et plus généralement, pour tout entier relatif r, on a : $x^r > y^r$.
5) Pour tous nombres réels x et y et pour tout entier naturel n, si $x > y$ alors $x^n > y^n$.
6) Pour tous entiers naturels n et p, si $n > p$ alors $1/n < 1/p$.
7) L'opposé de l'inverse d'un nombre est toujours égal à l'inverse de l'opposé.
8) On peut obtenir un nombre entier en multipliant n'importe quel nombre décimal, autant de fois que nécessaire, par des nombres entiers à un chiffre.
9) 75% des personnes interrogées ont répondu à la question, 60% ayant répondu "oui" et 40% ayant répondu "non". La réponse positive a donc la majorité absolue.

Exercice 8 L'hôtel des kangourous, en Australie, a deux particularités : il n'accepte que les kangourous (un seulement par chambre!) et il peut toujours accepter un kangourou de plus, même s'il est complet. En effet : l'arrivant est placé dans la chambre 1, le précédent occupant de la chambre 1 passe dans la 2, celui de la 2 dans la 3, et ainsi de suite... Sait-on combien cet hôtel a de chambres ?
Le propriétaire change la numérotation des chambre : 0, -1, 1, -2, 2, etc. On en déduit donc que ... $\mathbb{Z}$ contient autant de nombre que $\mathbb{N}$!? –